EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta …*.011**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze $\sin 30^\circ + \sin 150^\circ$.

(4p) **b)** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral de latură $2\sqrt{3}$.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre dreptele $d_1 : 2x - y + 5 = 0$ și $d_2 : x + y + 1 = 0$.

(4p) **d)** Să se determine distanța de la punctul $A(2,-1)$ la dreapta $d_1 : 2x - y + 5 = 0$.

(2p) **e)** Să se calculeze raza cercului $x^2 + y^2 = 9$.

(2p) **f)** Să se determine ecuația tangentei la elipsa $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$ în punctul $M(4,2)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $A = \{2,4,6,8,...,20\}$.

(3p) **a)** Să se determine numărul submulțimilor mulțimii A.

(3p) **b)** Să se determine câte submulțimi cu trei elemente conține mulțimea A.

(3p) **c)** Să se determine câte submulțimi ale mulțimii A conțin elementul 2.

(3p) **d)** Să se calculeze care este probabilitatea ca un element al mulțimii A să fie divizibil cu 10.

(3p) **e)** Să se calculeze suma elementelor mulțimii A.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **c)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

(3p) **d)** Să se arate că $0 < f(x) \le 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p).

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a,b,c,d \in \mathbf{C}$ şi polinomul $f = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ cu rădăcinile distincte, notate cu z_1 şi z_2 şi matricele $X = \dfrac{1}{z_1 - z_2}(A - z_2 I_2)$ şi $Y = \dfrac{1}{z_2 - z_1}(A - z_1 I_2)$.

(4p) **a)** Să se calculeze matricea A^2.

(4p) **b)** Să se arate că $z_1 + z_2 = a + d$ şi $z_1 z_2 = ad - bc$.

(2p) **c)** Să se arate că $A^2 = (z_1 + z_2)A - z_1 z_2 I_2$.

(4p) **d)** Să se arate că $A = z_1 X + z_2 Y$.

(2p) **e)** Să se arate că $A^{k+2} = (z_1 + z_2)A^{k+1} - z_1 z_2 A^k$ oricare ar fi $k \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $A^n = z_1^n X + z_2^n Y$.

(2p) **g)** Să se calculeze matricea B^n , $n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$ şi se defineşte şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ prin $a_1 = 2$ şi $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se determine $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x) \le \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,\infty)$.

(2p) **d)** Folosind eventual punctul **c),** să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{2}{3}$.

(2p) **e)** Să se calculeze primii patru termeni ai şirului $(a_n)_{n\ge 1}$.

(2p) **f)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este descrescător.

(2p) **g)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $a_n = \dfrac{2^n}{2^n - 1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, iar apoi să calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.